

## 1 Généralités

### Exercice 1 ★ Racine carrée de $X$ –

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle  $F$  tel que  $F^2 = X$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[651]

### Exercice 2 ★★★★★ Pôles et racines –

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels premiers entre eux. Déterminer les racines et les pôles de  $(X^p - 1)/(X^q - 1)$ , en précisant leur ordre de multiplicité.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[653]

### Exercice 3 ★★★★★ Fraction rationnelle à valeurs rationnelles sur les entiers –

Soit  $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle de  $\mathbb{R}[X]$  avec  $P \wedge Q = 1$  et telle que  $R(n) \in \mathbb{Q}$  pour une infinité d'entiers  $n \in \mathbb{N}$ . On veut démontrer que  $R(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  où  $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ . On note  $\omega(R) = \deg(P) + \deg(Q)$ .

1. Démontrer le résultat si  $\omega(R) = 0$ .

2. Soit  $d \geq 0$ . On suppose que le résultat est vrai pour toute fraction rationnelle  $R$  tel que  $\omega(R) \leq d$  et on souhaite le prouver pour toute fraction rationnelle telle que  $\omega(R) = d + 1$ . On fixe donc  $R = P/Q$  une fraction rationnelle telle que  $\omega(R) = d + 1$  et  $R(n) \in \mathbb{Q}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pourquoi peut-on supposer que  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ ? Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q(n) \neq 0$  et  $P(n)/Q(n) \in \mathbb{Q}$ . On pose

$$P_0(X) = \frac{P(X)Q(n) - Q(X)P(n)}{Q(n)(X - n)}.$$

Justifier que  $P_0 \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg(P_0) < \deg(P)$ . Conclure.

3. Pourquoi peut-on supposer que  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ ?

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q(n) \neq 0$  et  $P(n)/Q(n) \in \mathbb{Q}$ . On pose

$$P_0(X) = \frac{P(X)Q(n) - Q(X)P(n)}{Q(n)(X - n)}.$$

Justifier que  $P_0 \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg(P_0) < \deg(P)$ .

5. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2512]

## 2 Décomposition en éléments simples

### Exercice 4 ★★ Tous les cas possibles –

Décomposer sur  $\mathbb{R}$  les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \quad 2. \frac{X^2 + 3X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)} \quad 3. \frac{1}{X^4 - 1}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3225]

### Exercice 5 ★ Pôles simples –

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{1}{X^3 - X} \quad 2. \frac{X^3}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$$

**Exercice 6** ★★ Pôles multiples –

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{2X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2} \quad 2. \frac{X^3 + 1}{(X - 1)^3}$$

**Exercice 7** ★★★ Pôle multiple et facteur irréductible de degré 2 –

Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}$$

**Exercice 8** ★★ Avec paramètres –

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{1}{X^n - 1} \quad 2. \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

**Exercice 9** ★★★ Avec paramètres –

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. \frac{X^m}{(X - 1)^n} \quad 2. \frac{1}{X(X + 1) \cdots (X + n)}$$

**Exercice 10** ★★★★★ Avec paramètres –

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{(X - 1)(X^n - 1)}.$$

### 3 Applications

**Exercice 11** ★ Calcul de primitives –

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \frac{1}{1 - x^2} \text{ sur } ]1, +\infty[ \quad 2. x \mapsto \frac{x}{x^3 - 7x + 6} \text{ sur } ]2, +\infty[.$$

**Exercice 12** ★★ Calcul d'intégrale –

Soit  $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$ ,  $x \in ]1, +\infty[$ .

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{5X^2 + 21X + 22}{(X-1)(X+3)^2}$$

en éléments simples.

2. En déduire la primitive de  $f$  sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en 2.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3232]

---

### Exercice 13 Calcul d'intégrale –

Pour  $x > 0$ , on pose

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{x^3 + x}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X}.$$

2. En déduire la valeur de  $\int_1^2 f(x)dx$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3233]

---

### Exercice 14 Dérivée $n$ -ème d'une fraction rationnelle –

Soit  $n \geq 1$ . Déterminer la dérivée  $n$ -ème de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3231]

---

### Exercice 15 Un calcul de somme –

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ .

2. En déduire la limite de la suite  $(S_n)$  suivante :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[657]

---

### Exercice 16 Un calcul de somme –

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  possédant  $n$  racines distinctes  $x_1, \dots, x_n$  non-nulles.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{XP(X)}$ .

2. En déduire que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = \frac{-1}{P(0)}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[658]

---

### Exercice 17 Somme de l'inverse des dérivées aux racines –

Soit  $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k) \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme scindé à racines simples de degré  $n \geq 2$ .

1. Décomposer en éléments simples  $1/P$ .

2. En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3002]

---

### Exercice 18 Polynôme et dérivé –

---

1. Décomposer en éléments simples la fraction  $\frac{P'}{P}$ , où  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ .
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P' \mid P$ .

[Indication ▼](#)     [Correction ▼](#)

[659]

---

### Exercice 19 ★★☆☆ Enveloppe convexe des zéros –

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  admettant  $n$  racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Soient  $A_1, \dots, A_n$  les points du plan complexe d'affixe respectives  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

1. Décomposer la fraction rationnelle  $P'/P$  en éléments simples.
2. Soit  $\beta$  une racine de  $P'$ , et soit  $B$  son image dans le plan complexe. Déduire de la question précédente que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta - \alpha_j} = 0.$$

3. En déduire que  $B$  est un barycentre de la famille de points  $(A_1, \dots, A_n)$ , avec des coefficients positifs. Interpréter géométriquement cette propriété.

[Indication ▼](#)     [Correction ▼](#)

[660]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

Quel devrait être son degré ?

---

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Chercher les racines communes aux deux polynômes.

---

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

- 1.
  2. Considérer  $1/R$ . Le numérateur s'annule en  $n$ .
  3. Considérer  $1/R$ .
  4. Le numérateur s'annule en  $n$ .
  - 5.
- 

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Les pôles de ces fractions rationnelles sont les racines  $n$ -èmes de l'unité.

---

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

1. Écrire  $X = (X - 1) + 1$  et utiliser la formule du binôme.
  2. Utiliser la méthode usuelle (il n'y a que des pôles simples) et simplifier le résultat en utilisant des factorielles. Plutôt que d'utiliser la dérivée du dénominateur, il vaut mieux multiplier par  $X + k$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

---

Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle associée.

---

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

---

- 1.
  - 2.
- 

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

---

- 1.
  - 2.
- 

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

---

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2}.$$

Quelle est la dérivée  $n$ -ème de  $\frac{1}{x}$ ?

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

---

- 1.
  2. Réindexer les sommes, beaucoup de termes s'éliminent !
- 

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

---

- 1.
  2. Multiplier par  $X$  et regarder la limite en  $+\infty$  de cette fraction rationnelle.
- 

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

---

- 1.
  2. Multiplier par  $x$  et faire tendre vers  $+\infty$ .
- 

**Indication pour l'exercice 18 ▲**

---

1. Pour chercher la partie polaire relative à la racine  $a$ , factoriser  $P(X) = (X - a)^m Q(X)$  et dériver.
  2. Utiliser l'unicité de la décomposition en éléments simples.
- 

**Indication pour l'exercice 19 ▲**

---

- 1.
  - 2.
  3. Multiplier par la quantité conjuguée.
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

Si  $F$  est une fraction rationnelle, alors  $\deg(F^2) = 2\deg(F)$ . Or,  $\deg(X) = 1$ , et l'équation  $2n = 1$  n'a pas de solutions dans  $\mathbb{Z}$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Les racines de  $X^p - 1$  (resp.  $X^q - 1$ ) sont les racines  $p$ -ièmes de l'unité (resp.  $q$ -ièmes) et elles sont toutes simples. Mais il peut y avoir des simplifications entre le numérateur et le dénominateur et on doit déterminer les racines communes. Soit donc  $\omega$  une racine de  $X^p - 1$  et de  $X^q - 1$ . Alors  $\omega^p = \omega^q = 1$ . Mais, puisque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, on peut d'après le théorème de Bézout trouver deux entiers  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $pu + qv = 1$ . Alors

$$\omega = \omega^{pu+qv} = (\omega^p)^u (\omega^q)^v = 1.$$

Réciproquement, 1 est racine commune des deux polynômes. On a donc prouvé que les racines de la fraction rationnelle sont les racines  $p$ -ièmes de l'unité autre que 1. Ses pôles sont les racines  $q$ -ièmes de l'unité, autre que 1. Les multiplicités respectives sont à chaque fois égales à 1.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Si  $\omega(R) = 0$ , alors  $R$  est le quotient de deux réels  $R = p/q$ . L'hypothèse entraîne que  $R$  est à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire que  $p/q$  est rationnel. On peut donc écrire  $p/q = p_1/q_1$  avec  $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ .

2. Si  $\deg(P) < \deg(Q)$ , il suffira de prouver le résultat à la fraction rationnelle  $1/R$  qui vérifie les mêmes hypothèses que  $R$ , si ce n'est que cette fois le degré de son numérateur sera supérieur à celui de son dénominateur. Considérons  $S$  le polynôme  $S(X) = P(X)Q(n) - Q(X)P(n)$ . Alors, puisque  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ ,  $\deg(S) \leq \deg(P)$ . De plus,  $S(n) = 0$ . Ainsi,  $S$  se factorise en  $S(X) = (X - n)S_1(X)$  avec  $\deg(S_1) < \deg(P)$ . Mais alors,  $P_0 = \frac{S_1}{Q(n)}$  est bien un élément de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur strict au degré de  $P$ . Considérons  $T(X) = \frac{P_0(X)}{Q(X)}$ . Alors  $\omega(T) = \deg(P_0) + \deg(Q) < \omega(R)$ . De plus, si  $m \neq n$  est un entier tel que  $R(m) \in \mathbb{Q}$ , on a,

$$T(m) = \frac{P(m)Q(n) - Q(m)P(n)}{Q(m)Q(n)(m-n)} = \frac{P(m)}{Q(m)(n-m)} - \frac{P(n)}{Q(n)(n-m)} \in \mathbb{Q}.$$

Ainsi,  $T(m) \in \mathbb{Q}$  pour une infinité d'entiers  $m$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $T = \frac{P_2}{Q_2}$  où  $P_2, Q_2 \in \mathbb{Z}[X]$ . On remonte ensuite à  $R$  en remarquant que

$$R(X) = (X - n)T(X) + \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Puisque  $P(n)/Q(n)$  est rationnel, il s'écrit encore  $c/d$  avec  $c, d \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, mettant tout au même dénominateur, on a

$$R(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

où

$$P_1(X) = d(X - n)P_2(X) + c$$

et

$$Q_1(X) = dQ_2(X)$$

qui sont bien des polynômes à coefficients entiers.

3. Si  $\deg(P) < \deg(Q)$ , il suffira de prouver le résultat à la fraction rationnelle  $1/R$  qui vérifie les mêmes hypothèses que  $R$ , si ce n'est que cette fois le degré de son numérateur sera supérieur à celui de son dénominateur.

4. Considérons  $S$  le polynôme  $S(X) = P(X)Q(n) - Q(X)P(n)$ . Alors, puisque  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ ,  $\deg(S) \leq \deg(P)$ . De plus,  $S(n) = 0$ . Ainsi,  $S$  se factorise en  $S(X) = (X - n)S_1(X)$  avec  $\deg(S_1) < \deg(P)$ . Mais alors,  $P_0 = \frac{S_1}{Q(n)}$  est bien un élément de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur strict au degré de  $P$ .

5. Considérons  $T(X) = \frac{P_0(X)}{Q(X)}$ . Alors  $\omega(T) = \deg(P_0) + \deg(Q) < \omega(R)$ . De plus, si  $m \neq n$  est un entier tel que  $R(m) \in \mathbb{Q}$ , on a,

$$T(m) = \frac{P(m)Q(n) - Q(m)P(n)}{Q(m)Q(n)(m-n)} = \frac{P(m)}{Q(m)(n-m)} - \frac{P(n)}{Q(n)(n-m)} \in \mathbb{Q}.$$

Ainsi,  $T(m) \in \mathbb{Q}$  pour une infinité d'entiers  $m$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $T = \frac{P_2}{Q_2}$  où  $P_2, Q_2 \in \mathbb{Z}[X]$ .  
On remonte ensuite à  $R$  en remarquant que

$$R(X) = (X - n)T(X) + \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

Puisque  $P(n)/Q(n)$  est rationnel, il s'écrit encore  $c/d$  avec  $c, d \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, mettant tout au même dénominateur, on a

$$R(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$$

où

$$P_1(X) = d(X - n)P_2(X) + c$$

et

$$Q_1(X) = dQ_2(X)$$

qui sont bien des polynômes à coefficients entiers.

---

#### Correction de l'exercice 4 ▲

---

1. On commence par calculer la partie entière de la fraction rationnelle :

$$X^2 + 2X + 5 = 1(X^2 - 3X + 2) + 5X + 3.$$

On factorise le dénominateur

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

On écrit la décomposition en éléments simples a priori :

$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2}.$$

On calcule les coefficients  $a$  et  $b$  : posons  $P(X) = X^2 + 2X + 5$ ,  $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ ,  $Q'(X) = 2X - 3$ .

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{8}{-1} = -8$$

$$b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{13}{1} = 13.$$

Ainsi,

$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 - \frac{8}{X - 1} + \frac{13}{X - 2}.$$

2. On commence par calculer la partie entière de la fraction rationnelle :

$$X^2 + 2X + 5 = 1(X^2 - 3X + 2) + 5X + 3.$$

3. On factorise le dénominateur

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

4. On écrit la décomposition en éléments simples a priori :

$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2}.$$

5. On calcule les coefficients  $a$  et  $b$  : posons  $P(X) = X^2 + 2X + 5$ ,  $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ ,  $Q'(X) = 2X - 3$ .

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{8}{-1} = -8$$



$$b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{13}{1} = 13.$$

6. Ainsi,

$$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

7. Puisque le degré du dénominateur est strictement supérieur au degré du numérateur, la partie entière est nulle. On a donc

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}.$$

Calculons  $a$ . On pose  $P(X) = X^2 + 3X + 1$ ,  $Q(X) = (X-1)^2(X-2)$ ,  $Q'(X) = 2(X-1)(X-2) + (X-1)^2$  et

$$a = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{11}{1} = 11.$$

Calculons  $c$ . On multiplie par  $(X-1)^2$  et on évalue en  $X = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{X^2 + 3X + 1}{X-2} &= \frac{11(X-1)^2}{X-2} + b(X-1) + c \\ \frac{5}{-1} &= c \implies c = -5. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{-5}{(X-1)^2}.$$

Pour calculer  $b$ , on multiplie par  $X$  et on fait tendre  $X$  vers l'infini.

$$\frac{X(X^2 + 3X + 1)}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11X}{X-2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{-5X}{(X-1)^2}.$$

Quand  $X \rightarrow +\infty$ ,

$$1 = 11 + b + 0 \implies b = -10.$$

Conclusion :

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11}{X-2} - \frac{10}{X-1} - \frac{5}{(X-1)^2}.$$

8. Puisque le degré du dénominateur est strictement supérieur au degré du numérateur, la partie entière est nulle.

9. On a donc

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}.$$

10. Calculons  $a$ . On pose  $P(X) = X^2 + 3X + 1$ ,  $Q(X) = (X-1)^2(X-2)$ ,  $Q'(X) = 2(X-1)(X-2) + (X-1)^2$  et

$$a = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{11}{1} = 11.$$

11. Calculons  $c$ . On multiplie par  $(X-1)^2$  et on évalue en  $X = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{X^2 + 3X + 1}{X-2} &= \frac{11(X-1)^2}{X-2} + b(X-1) + c \\ \frac{5}{-1} &= c \implies c = -5. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{-5}{(X-1)^2}.$$

12. Pour calculer  $b$ , on multiplie par  $X$  et on fait tendre  $X$  vers l'infini.

$$\frac{X(X^2 + 3X + 1)}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11X}{X-2} + \frac{bX}{X-1} + \frac{-5X}{(X-1)^2}.$$

Quand  $X \rightarrow +\infty$ ,

$$1 = 11 + b + 0 \implies b = -10.$$

Conclusion :

$$\frac{X^2 + 3X + 1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{11}{X-2} - \frac{10}{X-1} - \frac{5}{(X-1)^2}.$$

13. La partie entière est nulle. On factorise le dénominateur :

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X-1)(X+1)(X^2 + 1).$$

On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

On pose  $P(X) = 1$ ,  $Q(X) = X^4 - 1$  de sorte que  $Q'(X) = 4X^3$  et

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{-1}{4}.$$

Pour calculer  $c$  et  $d$ , on effectue d'abord la décomposition en éléments neutres sur  $\mathbb{C}$  et on regroupe les termes conjugués. Décomposons la fraction rationnelle sur  $\mathbb{C}$ .

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 + 1) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$$

On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{e}{X-i} + \frac{f}{X+i}.$$

On pose  $P(X) = 1$ ,  $Q(X) = X^4 - 1$ ,  $Q'(X) = 4X^3$ . On a déjà vu  $a = 1/4$ ,  $b = -1/4$  et on a

$$e = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{1}{4i^3} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

$$f = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = \frac{1}{4(-i)^3} = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{i/4}{X-i} - \frac{i/4}{X+i}.$$

On termine en passant de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^4 - 1} &= \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{i/4}{X-i} - \frac{i/4}{X+i} \\ &= \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{i(X+i) - i(X-i)}{(X-i)(X+i)} \\ &= \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{X^2+1} \\ &= \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} - \frac{1/2}{X^2+1}. \end{aligned}$$

14. La partie entière est nulle.

15. On factorise le dénominateur :

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X-1)(X+1)(X^2 + 1).$$

16. On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}.$$

17. On pose  $P(X) = 1$ ,  $Q(X) = X^4 - 1$  de sorte que  $Q'(X) = 4X^3$  et

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{-1}{4}.$$

18. Pour calculer  $c$  et  $d$ , on effectue d'abord la décomposition en éléments neutres sur  $\mathbb{C}$  et on regroupe les termes conjugués.

19. Décomposons la fraction rationnelle sur  $\mathbb{C}$ .

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i).$$

On écrit

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{e}{X - i} + \frac{f}{X + i}.$$

On pose  $P(X) = 1$ ,  $Q(X) = X^4 - 1$ ,  $Q'(X) = 4X^3$ . On a déjà vu  $a = 1/4$ ,  $b = -1/4$  et on a

$$e = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{1}{4i^3} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$$

$$f = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = \frac{1}{4(-i)^3} = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{i/4}{X - i} - \frac{i/4}{X + i}.$$

20. On termine en passant de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^4 - 1} &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{i/4}{X - i} - \frac{i/4}{X + i} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{i(X + i) - i(X - i)}{(X - i)(X + i)} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{X^2 + 1} \\ &= \frac{1/4}{X - 1} - \frac{1/4}{X + 1} - \frac{1/2}{X^2 + 1}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. La partie entière est nulle, et le dénominateur se factorise en  $X(X - 1)(X + 1)$ . Multipliant par  $X$  et faisant  $X = 0$ , on trouve la partie polaire relativement à  $X - 0$ , et ainsi de suite... On trouve finalement

$$\frac{1}{X^3 - X} = \frac{-1}{X} + \frac{1/2}{X - 1} + \frac{1/2}{X + 1}.$$

2. En appliquant exactement la même méthode, on trouve que la décomposition en éléments simples est

$$1 + \frac{1}{2(X - 1)} - \frac{8}{X - 2} + \frac{27}{2(X - 3)}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Le dénominateur se factorise en  $(X^2 - 1)^2 = (X - 1)^2(X + 1)^2$ . Il faut donc étudier la partie polaire relative à +1 et à -1. Commençons par étudier la partie polaire relative à -1. La fraction rationnelle s'écrit sous la forme

$$\frac{2X^2 + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2} = \frac{\lambda_1}{X + 1} + \frac{\lambda_2}{(X + 1)^2} + G(X),$$

où  $G(X) = \frac{\mu_1}{X - 1} + \frac{\mu_2}{(X - 1)^2}$  est une fraction rationnelle dont -1 n'est pas un pôle. Multipliant cette égalité par  $(X + 1)^2$  et faisant  $X = -1$ , on trouve  $\lambda_2 = 3/4$ . On calcule ensuite

$$\frac{2X^2 + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2} - \frac{3/4}{(X + 1)^2} = \frac{(5X + 1)/4}{(X + 1)(X - 1)^2} = \frac{\lambda_1}{X + 1} + G(X).$$

On multiplie cette fois par  $X + 1$ , et on fait  $X = -1$ , et on trouve  $\lambda_1 = -1/4$ . Pour étudier la partie polaire relative à 1, on peut procéder de la même façon ou simplement remarquer que la fraction rationnelle est paire. On en déduit que

$$\frac{2X^2 + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2} = \frac{-1/4}{X + 1} + \frac{3/4}{(X + 1)^2} + \frac{1/4}{X - 1} + \frac{3/4}{(X - 1)^2}.$$

2. La partie entière de cette fraction rationnelle est égale à 1, et on a

$$\frac{X^3 + 1}{(X - 1)^3} = 1 + \frac{3X^2 - 3X + 2}{(X - 1)^3} = 1 + \frac{a}{(X - 1)^3} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 1}.$$

Pour trouver  $a$ , on multiplie par  $(X - 1)^3$  et on fait  $X = 1$ . On trouve

$$a = 2.$$

Pour trouver  $b$ , on soustrait  $\frac{2}{(X - 1)^3}$ , et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{3X^2 - 3X + 2}{(X - 1)^3} - \frac{2}{(X - 1)^3} &= \frac{3X}{(X - 1)^2} \\ &= \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 1}. \end{aligned}$$

Multipliant par  $(X - 1)^2$  et faisant  $X = 1$ , on trouve

$$b = 3.$$

Finalement, on retranche encore  $\frac{3}{(X - 1)^2}$  de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{3X}{(X - 1)^2} - \frac{3}{(X - 1)^2} &= \frac{3}{X - 1} \\ &= \frac{c}{X - 1}. \end{aligned}$$

On a donc  $c = 3$ . Finalement, la décomposition en éléments simples recherché est

$$1 + \frac{2}{(X - 1)^3} + \frac{3}{(X - 1)^2} + \frac{3}{X - 1}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

On commence par réaliser la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ . Les pôles sont -1 (double),  $i$  et  $-i$ . La fraction rationnelle étant à coefficients réels, les parties polaires sont conjuguées. On a donc

$$\frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)} = 1 + \frac{a}{(X + 1)^2} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i}.$$

Multipliant par  $X - i$  et faisant  $X = i$ , on trouve

$$c = \frac{i^4 + 1}{(i + i)(i + 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

De même, on a

$$a = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1.$$

En retranchant  $\frac{1}{(X+1)^2}$ , on trouve

$$\frac{X^4 - X^2}{(X + 1)^2(X^2 + 1)} = \frac{X^2(X - 1)}{(X + 1)(X^2 + 1)} = 1 + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i}.$$

Multipliant par  $X + 1$  et faisant  $X = -1$ , on trouve

$$b = -1.$$

Finalement,

$$\frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)} = 1 + \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{1}{X + 1} - \frac{1/2}{X - i} - \frac{1/2}{X + i}.$$

Finalement, en regroupant les deux derniers termes, on trouve la décomposition sur  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)} = 1 + \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{1}{X + 1} - \frac{X}{X^2 + 1}.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. Les pôles de  $1/(X^n - 1)$  sont les racines  $n$ -ièmes de l'unité, c'est-à-dire les complexes  $x_k = e^{2ik\pi/n}$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$ . Chaque pôle est simple, la partie polaire correspondante est donc de la forme  $\frac{c_k}{X - x_k}$  avec  $c_k = \frac{1}{P'(x_k)} = \frac{1}{nx_k^{n-1}}$ . Or,  $x_k^{n-1} = \frac{x_k^n}{x_k} = \frac{1}{x_k} = e^{-2ik\pi/n}$ . La décomposition en éléments simples recherché vaut donc

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

2. Les racines de  $X^n - 1$  sont les complexes  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ . La fraction rationnelle admet donc  $n$  pôles, qui sont tous simples. Sa décomposition en éléments simples a pour forme

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}$$

avec  $\alpha_k = \frac{\omega_k^{n-1}}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{1}{n}$ . La décomposition en éléments simples est

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. On écrit  $X = (X - 1) + 1$  et on utilise la formule du binôme. Il vient

$$X^m = ((X - 1) + 1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (X - 1)^k.$$

On distingue alors deux cas pour l'écriture de la décomposition en éléments simples : si  $m \geq n$ , alors

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = \sum_{k=n}^m \binom{m}{k} (X-1)^{k-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}},$$

le premier terme étant la partie entière et le second la partie polaire. Si  $m < n$ , alors on écrit simplement

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^m \frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}}.$$

2. On peut écrire

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{X+k}.$$

Reste à déterminer  $a_k$  pour  $k = 0, \dots, n$ . Le plus simple ici, comme le dénominateur est déjà factorisé, est de multiplier par  $X+k$  et de faire tendre  $X$  vers  $-k$ . On obtient alors

$$a_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\cdots(-k+(k-1))(-k+(k+1))\cdots(-k+n)} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}.$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

La fraction admet 1 comme pôle double et  $\omega_k = e^{2i\pi k/n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  comme pôles simples. On commence par calculer le coefficient devant  $(X-1)^2$ . On écrit que la fraction est égale à

$$\frac{1}{(X-1)^2(1+X+\cdots+X^{n-1})} = \frac{\lambda}{(X-1)^2} + Q(X),$$

où 1 n'est pas pôle double de  $Q$ . Multipliant par  $(X-1)^2$  et faisant tendre  $X$  vers 1, on en déduit que  $\lambda = \frac{1}{n}$ . Le coefficient devant  $\frac{1}{X-\omega_k}$  est lui obtenu en dérivant le dénominateur, et en remplaçant par  $\omega_k$ . On trouve :

$$\frac{1}{\omega_k^n - 1 + (\omega_k - 1)n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}.$$

Enfin, pour calculer le terme en  $\frac{1}{X-1}$ , on écrit que

$$\frac{1}{(X-1)^2(1+X+\cdots+X^{n-1})} - \frac{1/n}{(X-1)^2} = \frac{\mu}{(X-1)} + R(X),$$

où 1 n'est plus un pôle de  $R$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(X-1)^2(1+X+\cdots+X^{n-1})} - \frac{1/n}{(X-1)^2} \\ &= \frac{n - (1+X+\cdots+X^{n-1})}{n(X-1)^2(1+X+\cdots+X^{n-1})} \\ &= -\frac{(X-1) + (X^2-1) + \cdots + (X^{n-1}-1)}{n(X-1)^2(1+X+\cdots+X^{n-1})} \\ &= -\frac{1 + (1+X) + (1+X+X^2) + \cdots + (1+X+\cdots+X^{n-2})}{n(X-1)(1+X+\cdots+X^{n-1})}. \end{aligned}$$

Multipliant par  $X-1$  et faisant  $X=1$ , on trouve

$$\mu = -\frac{1+2+\cdots+n-1}{n^2} = \frac{1-n}{2n}.$$

Finalement, la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle est donc :

$$\frac{1-n}{2n(X-1)} + \frac{1}{n(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)} \frac{1}{X-\omega_k}.$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

---

On va réaliser à chaque fois une décomposition en éléments simples.

1. On peut factoriser  $1 - X^2$  en  $(1 - X)(1 + X)$  et on sait qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  de sorte que

$$\frac{1}{1 - X^2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1}.$$

Notons  $Q(X) = 1 - X^2$ , de sorte que  $Q'(X) = -2X$ . On a  $a = 1/Q'(1) = -1/2$  et  $b = 1/Q'(-1) = 1/2$ . Ainsi,

$$\frac{1}{1 - X^2} = \frac{-1/2}{X - 1} + \frac{1/2}{X + 1}.$$

Ainsi, une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$  sur  $]1, +\infty[$  est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x - 1).$$

2. On peut factoriser  $X^3 - 7X + 6$  en  $(X + 3)(X - 1)(X - 2)$  (pour cela, on remarque auparavant que 1 est racine évidente par exemple). On en déduit qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$\frac{X}{X^3 - 7X + 6} = \frac{a}{X + 3} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X - 2}.$$

Posons  $P(X) = X$  et  $Q(X) = X^3 - 7X + 6$ , de sorte que  $Q'(X) = 3X^2 - 7$ . Alors on a

$$a = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = -\frac{3}{20}, \quad b = \frac{P(1)}{Q'(1)} = -\frac{1}{4}, \quad c = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{2}{5}.$$

On a donc

$$\frac{x}{x^3 - 7x + 6} = -\frac{3}{20(x + 3)} - \frac{1}{4(x - 1)} + \frac{2}{5(x - 2)}.$$

Une primitive de cette fonction sur  $]2, +\infty[$  est donc donnée par

$$x \mapsto -\frac{3}{20} \ln(x + 3) - \frac{1}{4} \ln(x - 1) + \frac{2}{5} \ln(x - 2).$$

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

---

1. On écrit la décomposition a priori :

$$\frac{5X^2 + 21X + 22}{(X - 1)(X + 3)^2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 3} + \frac{c}{(X + 3)^2}.$$

Pour déterminer  $a$ , on multiplie par  $X - 1$  et on fait tendre  $X$  vers 1 : on trouve

$$a = \frac{5 + 21 + 22}{4^2} = \frac{48}{16} = 3.$$

Pour déterminer  $c$ , on multiplie par  $(X + 3)^2$  et on trouve

$$c = \frac{45 - 63 + 22}{-4} = -1.$$

Pour déterminer  $b$ , on multiplie par  $X$  et on fait tendre  $X$  vers  $+\infty$ . On a donc

$$\frac{3X}{X - 1} + \frac{bX}{X + 3} - \frac{X}{(X + 3)^2} = \frac{5X^3 + 21X^2 + 22X}{(X - 1)(X + 3)^2}.$$

En faisant tendre  $X$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$3 + b = 5 \iff b = 2.$$

2. On a donc obtenu, pour  $x > 1$ ,

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Les primitives de  $f$  sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle  $d$  vérifie l'équation

$$3\ln(1) + 2\ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0.$$

La primitive de  $f$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  qui s'annule en 2 est donc la fonction  $F$  définie par

$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln 5 - \frac{1}{5}.$$

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

1. On commence par effectuer la division euclidienne de  $X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2$  par  $X^3 + X$ . On trouve que le quotient vaut  $X + 1$  et le reste vaut  $3X^2 + X + 2$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X} &= X + 1 + \frac{3X^2 + X + 2}{X^3 + X} \\ &= X + 1 + \frac{3X^2 + X + 2}{X(X-i)(X+i)} \\ &= X + 1 + \frac{a}{X} + \frac{b}{X-i} + \frac{\bar{b}}{X+i}. \end{aligned}$$

Posons  $P(X) = 3X^2 + X + 2$  et  $Q(X) = X^3 + X$ . Alors  $a = P(0)/Q'(0) = 2$ ,  $b = P(i)/Q'(i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{X^4 + X^3 + 4X^2 + 2X + 2}{X^3 + X} &= X + 1 + \frac{2}{X} + \frac{1}{2} \frac{1-i}{X-i} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{X+i} \\ &= X + 1 + \frac{2}{X} + \frac{X+1}{X^2+1}. \end{aligned}$$

2. On calcule l'intégrale en cherchant une primitive de chacun des termes précédents. On écrit encore

$$\frac{X+1}{X^2+1} = \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{X^2+1}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

---

### Correction de l'exercice 14 ▲



On va commencer par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2}.$$

On peut factoriser  $X^2 - 3X + 2$  en  $(X - 1)(X - 2)$ . On a donc

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X - 2}.$$

Notons  $P(X) = X^2 - 3X + 2$  de sorte que  $P'(X) = 2X - 3$ . Alors  $a = \frac{1}{P'(1)} = -1$  et  $b = \frac{1}{P'(2)} = 1$ . Ainsi, on a

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}.$$

D'autre part, il est facile de voir (par exemple par récurrence) que la dérivée  $n$ -ème de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ . On en déduit finalement que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x - 1)^{n+1}}.$$

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. On sait que la fraction rationnelle admet une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X + 2}.$$

Par les techniques usuelles (identification, multiplication par  $X$  et faire  $X = 0, \dots$ ), on trouve

$$\frac{1}{X(X + 1)(X + 2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{1/2}{X + 2}.$$

2. Utilisant la décomposition en éléments simples précédente, il vient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1/2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que  $(S_n)$  converge vers  $\frac{1}{4}$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

1. On écrit la forme à priori de la décomposition en éléments simples qui est ici

$$\frac{1}{XP(X)} = \frac{\alpha_0}{X} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X - x_k}.$$

On calcule  $\alpha_0$  en multipliant tout par  $X$  et en faisant tendre  $X$  vers 0, et on trouve  $\alpha_0 = \frac{1}{P(0)}$ . Pour  $k \geq 1$ , on multiplie tout par  $X - x_k$  et on fait tendre  $X$  vers  $x_k$ . On trouve cette fois

$$\alpha_k = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{x - x_k}{x_k P(x)} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{x - x_k}{x_k (P(x) - P(x_k))} = \frac{1}{x_k P'(x_k)}.$$

La décomposition en éléments simples est donc

$$\frac{1}{XP(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} \times \frac{1}{X - x_k} + \frac{1}{P(0)} \times \frac{1}{X}.$$

2. On va multiplier par  $X$  cette fraction rationnelle, et on va étudier sa limite en  $+\infty$ . On trouve d'une part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{xP(x)} = 0$$

et d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} \times \frac{x}{x-x_k} + \frac{1}{P(0)} \times \frac{x}{x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} + \frac{1}{P(0)}.$$

Identifiant ces deux égalités, on trouve le résultat voulu !

---

### Correction de l'exercice 17 ▲

1. Les racines de  $P$  étant simples, on a

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}.$$

De plus, pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\lambda_k = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{x - x_k}{P(x)} = \frac{1}{P'(x_k)}.$$

2. Multipliant par  $X$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{x}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} \times \frac{x}{x - x_k}.$$

Faisons tendre  $x$  vers  $+\infty$ . Puisque  $\deg(P) \geq 2$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} = 0.$$


---

### Correction de l'exercice 18 ▲

1. On va étudier séparément les parties polaires relatives à chaque racine. Soit donc  $a$  une racine de  $P$ , de multiplicité  $m$ . Alors on peut factoriser  $P$  en  $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ , soit en dérivant  $P'(X) = m(X - a)^{m-1} Q(X) + (X - a)^m Q'(X)$ . On trouve alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{m}{X - a} + \frac{Q'(X)}{Q(X)}.$$

Or,  $a$  n'est pas racine de  $Q$ , donc  $Q'/Q$  n'admet pas  $a$  pour pôle et  $\frac{m}{X-a}$  est la partie polaire de  $P'/P$  relative à  $a$ . En résumé, si  $P(X) = \lambda(X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_p)^{m_p}$ , alors on trouve

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^p \frac{m_i}{X - a_i}.$$

2. Si  $P' \mid P$ , alors  $P(X) = \lambda(X - a)P'$  (car  $\deg P' = \deg P - 1$ ) et  $P'/P = \frac{1/\lambda}{X-a}$ . Par unicité de la décomposition en éléments simples et le résultat de la question précédente, ceci entraîne que  $a$  est l'unique racine de  $P$ , et donc que  $P(X) = \lambda(X - a)^m$ . Réciproquement, les polynômes de cette forme sont tels que  $P' \mid P$ .

---

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. On va étudier séparément les parties polaires relatives à chaque racine. On peut factoriser  $P$  en  $P(X) = (X - \alpha_j)Q(X)$ , soit en dérivant  $P'(X) = Q(X) + (X - \alpha_j)Q'(X)$ . On trouve alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X - \alpha_j} + \frac{Q'(X)}{Q(X)}.$$

Or,  $\alpha_j$  n'est pas racine de  $Q$ , donc  $Q'/Q$  n'admet pas  $\alpha_j$  pour pôle et  $\frac{1}{X-\alpha_j}$  est la partie polaire de  $P'/P$  relative à  $a$ . En résumé, la décomposition en éléments simples recherchée est

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{X - \alpha_j}.$$

2. Il suffit d'évaluer l'équation précédente en  $\beta$ .
3. On multiplie par la quantité conjuguée et on trouve

$$\sum_{j=1}^n \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}_j}{|\beta - \alpha_j|^2} = 0.$$

Prenant le conjugué de cette expression, on trouve :

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\beta - \alpha_j|^2} \right) \beta = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\beta - \alpha_j|^2} \alpha_j,$$

ce qui correspond bien au résultat souhaité. On vient donc de prouver que toute racine de  $P'$  est dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ . Ce résultat s'appelle le théorème de Lucas, il est aussi valide si les racines de  $P$  ne sont pas simples. La preuve est similaire, si ce n'est que la décomposition en éléments simples de  $P'/P$  est plus difficile à obtenir. C'est un bon exercice !

---